§ 16. Физический смысл преобразований Лоренца и четырехвекторы

Прежде всего, можно отметить, что «представления о пространстве и времени, диктуемые теорией относительности, сильно отличаются от наших привычных, обиходных представлений об этих всеобщих формах существования материи». В учебно-методической (да и в научно-технической) литературе до сих пор нередко отдельные следствия СТО отмечаются как «парадоксы» релятивизма. И это не только критический анализ кинематических «парадоксов», но и анализ чисто философского аспекта – правомерность постановки вопроса об относительности вообще любого физического знания.

О преобразованиях Лоренца в учебной и научной литературе написано очень много и в разных публикациях им придают неоднозначный смысл. В подходах Лоренца и Эйнштейна они также имеют совершенно разное содержание.

Естественно задать вопрос: так в чем же секрет и магическая сила этих преобразований координат и времени, которые, если можно так выразиться, перевернули наши представления об окружающем нас мире в XX веке?

На простейшем примере покажем, что понять физический смысл преобразований Лоренца не представляет большой сложности.

Пусть в направлении оси *OX* (рис.16.1) распространяется плоская волна *B* со скоростью ***c***.

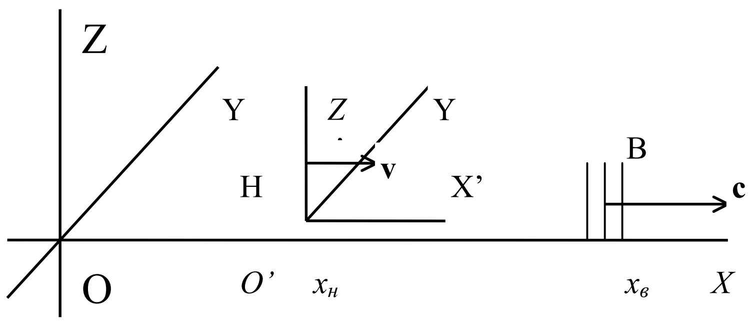

Рис.16.1. Движение наблюдателя *H* и распространение плоской волны *B* вдоль оси *OX.*

Уравнение движения фронта этой волны в неподвижной системе координат, связанной со средой, имеет вид:

$$x_B = ct \ . \tag{16.1}$$

Наблюдатель *H* движется в том же направлении со скоростью v. Уравнение движения наблюдателя такое

$$x_H = vt\ . \tag{16.2}$$

Уравнение (16.1) можно записать и в такой форме, сместив его по оси *OX* с целью перехода в подвижную систему координат,

$$x_B - vt = ct - vt = c\left(t - \frac{\beta x_B}{c}\right), \tag{16.3}$$

где $\beta = \frac{v}{c}$. С другой стороны, тот же результат получается формальным вычитанием из обеих частей уравнения (16.1) величины $v\,t$

Такой простой прием преобразования уравнения (16.1) – это и есть уже начало преобразований Лоренца. Осталось только ввести в это уравнение справа и слева масштабный множитель γ, который появился в запаздывающем потенциале (15.36).

Умножив обе части уравнения (16.3) на масштабный множитель γ, мы получаем

$$\gamma\left(x_B - vt\right) = c\gamma\left(t - \frac{\beta x_B}{c}\right) \tag{16.4}$$

или в сокращенной форме

$$x'_B = ct'\ , \tag{16.5}$$

где

$$x'_B = \gamma\left(x_B - vt\right) \quad \text{и} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x_B}{c}\right). \tag{16.6}$$

Преобразования координат и времени (16.6), которые здесь получены столь просто, - это и есть по сути дела настоящие преобразования Лоренца. При этом обращает на себя внимание инвариантность формы уравнений для описания распространения фронта волны, как в исходной, так и в “штрихованной” системах координат. Основная идея заключается в том, что при переходе к подвижной системе координат (параллельный перенос вдоль оси OX) выполняется одновременно и смещение по оси времени, так что в конечном итоге обеспечивается инвариантность уравнений (16.1) и (16.5). Масштабный же множитель γ в этом случае принципиальной роли не играет, и введен лишь только потому, что он проявляется при непосредственном вычислении силовых потенциалах для движущихся частиц. Для простоты мы, как это обычно принято, считаем, что движения наблюдателей или распространения волн по осям OY и OZ нет, и соответствующие переменные остаются неизменны.

Для плоской волны никаких осложнений, как оказалось, не возникает, однако в случае сферической волны ситуация складывается несколько сложнее. Электромагнитные поля, которые генерируются элементарными частицами, образуют пространство сферических волн, поскольку они всегда рождаются в некоторой малой области и распространяются со скоростью света в форме расширяющейся сферы. Уравнение распространения фронта сферической волны имеет вид:

$$R = ct\ , \tag{16.7}$$

где R - радиус расширяющейся сферы. Для сравнения полезно вспомнить уравнение (16.1), которое было записано для плоской волны. Возведем обе части уравнения (16.7) в квадрат

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2\ . \tag{16.8}$$

Теперь нетрудно догадаться, что если мы запишем уравнение (16.8) в форме

$$x'^2 + y^2 + z^2 = c^2t'^2\ , \tag{16.9}$$

где x' и t' применены в соответствии с выражениями (16.6), то это будет то же самое уравнение (16.7) в тех же динамических переменных *x,y,z,t*, поскольку подобная замена переменных не нарушает исходного уравнения (16.7).

Проверим это в действии. Для этого возведем обе части уравнения (16.4) в квадрат

$$\gamma^2\left(x^2 - 2xvt + v^2t^2\right) = c^2\gamma^2\left(t^2 - 2\frac{\beta xt}{c} + \frac{\beta^2x^2}{c^2}\right). \tag{16.10}$$

После соответствующей перегруппировки слагаемых имеем

$$\gamma^2x^2\left(1-\beta^2\right) = c^2\gamma^2t^2\left(1-\beta^2\right), \tag{16.11}$$

и окончательно после сокращения γ^2 со скобкой, если потребовать выполнения условия $\gamma^2\left(1-\beta^2\right)=1$, получаем

$$x^2 = c^2t^2\ , \tag{16.12}$$

т.е. форма уравнения (16.1) полностью восстановилась. При этом заметим, что сокращение скобок в (16.11) произошло внутри каждой из частей, и поэтому не затрагивает масштабы по осям OY и OZ, если эти переменные возникают в уравнении, поэтому уравнение (16.7) остается в силе.

Таким образом, используя преобразования Лоренца, мы добиваемся того, что обычно сложная задача, связанная с движущимися объектами в поле сферических волн, посредством формальной замены переменных x, t на “штрихованные” переменные x', t' сводится к статической задаче. Поскольку в приведенных формулах преобразований не содержатся ни массы, ни силы, ни какие-либо полевые характеристики, можно заключить, что подобного рода задачи не относятся к динамике. Это чисто кинематическая задача, так как вводится поправка именно на кинематический эффект с целью его, так сказать, полной компенсации в уравнении распространения сферической волны. При этом возникает необходимость прибегнуть к понятию “местного времени” t' в подвижной системе координат аналогично тому, как это в свое время предлагал Лоренц. Другими словами, можно сделать вывод о том, что основная идея преобразований Лоренца сводится к возможности осуществления геометрической поправки на кинематический эффект, обусловленный движением объекта в физическом вакууме, с целью преобразования волновой картины пространства.[1]

Для задач статики, то есть когда микрочастицы зафиксированы в пространстве (или среде), рассматриваются сферически симметричные силовые поля – отсюда простота большинства формул, описывающих фундаментальные законы. Однако, когда возникает необходимость рассматривать силовые поля движущихся микрочастиц, неизбежно приходится учитывать деформацию полей, обусловленную эффектами запаздывания рассеянных волн. Естественным образом деформация сферических полей создает большое многообразие различных по своей форме сил. Наконец, как результат таковых полевых деформаций та часть физики, которая традиционно отнесена к электродинамике, представляется необычайно сложным и трудно поддающимся осмыслению ее разделом, а это порождает в свою очередь многочисленные необоснованные мистификации в отношении пространственно-временных представлений.

Приведем еще один пример, где необходимо учитывать движение частицы в полях. Из теории поля хорошо известно, что полная производная по

---

[1] В качестве примеров подобного рода поправок можно привести общепризнанную практику использования местного времени в различных городах мира для того, чтобы принятый распорядок дня для людей выглядел примерно одинаково вне зависимости от местности. В данном случае вводится кинематическая поправка, учитывающая вращение Земли. Аналогичная кинематическая поправка используется и в обсерваториях, когда возникает необходимость обеспечивать неподвижность звездного неба на время наблюдения. Поскольку человек сам создает эталоны длины и времени, то для перехода от динамической задачи к соответствующей статической несложно было бы ввести новый эталон длины по оси OX и новый эталон времени, назвав последний местным временем. В свое время профессор МГУ Я.П. Терлецкий – в целом твердо придерживающийся позиций академического релятивизма – предостерегал, тем не менее, от крайностей различных интерпретаций: «Возможность произвольного выбора системы отсчета и изображения явлений толкуется как относительность содержания физических теорий, относительность в смысле отношения к *наблюдателю*, связанному с системой отсчета. Отсюда подводится фундамент под представление, что вообще наблюдаемый физический объект не существует без наблюдателя, так как его проявление, фиксируемое измерительными приборами, зависит от точки зрения наблюдателя».

времени от некоторой полевой функции, вычисленная с учетом движения частицы в поле, не совпадает с частной производной от той же функции, вычисленной в неподвижной точке поля. Вычисляя полную производную по времени, мы переходим в систему координат, связанную с движущейся частицей, для которой полевые характеристики воспринимаются совсем по иному, нежели для неподвижной частицы.

Образно говоря, движущаяся частица как бы выполняет своеобразную роль наблюдателя в подвижной системе координат и своим поведением сообщает нам, что процессы там происходят совсем не так, как у нас в неподвижной системе.

Когда мы переходим в подвижную систему координат, производя замену координаты X и времени t в соответствии с преобразованиями Лоренца, то и функции, входящие в различные динамические уравнения, очевидно, также изменят свой вид, поскольку они могут зависеть от координаты X и времени.

Представляет большой интерес найти некоторые общие правила, по которым можно было бы как по таблице производить преобразование различных функций, не повторяя кропотливых подстановок x' и t' в функции и уравнения. Оказывается, что такие правила удается вывести, опираясь на те же самые преобразования Лоренца.

В работе [24] приводится пример прямого вывода преобразований Лоренца в применении к импульсу частицы $\boldsymbol{p}$. При этом установлено, что величины (mc, $\boldsymbol{p}$) ведут себя при переходе в подвижную систему координат точно так же, как и величины (ct, $\boldsymbol{r}$) в формулах Лоренца (16.6).

Можно привести целый ряд других примеров, когда четыре функции, одна из которых скалярная, а три других - это проекции некоторого известного вектора в декартовых координатах, проявляют себя как аналоги величин *(ct, x,y,z)* при преобразованиях Лоренца [12, 19].

Если говорить точнее, то преобразования Лоренца касаются только скалярной функции и x-компоненты подходящего к этой скалярной функции вектора. Поэтому данные правила являются довольно простыми и не требуют разработки для этого какого-то специального математического аппарата или тензорного исчисления.

Можно подсказать небольшой секрет в подборе скалярной функции под соответствующий вектор. Поскольку преобразования Лоренца чаще всего используются в электродинамике, где участвуют волновые процессы со скоростью волн $\boldsymbol{c}$, то скалярная функция, как правило, входит в эти преобразования в качестве временной компоненты в комбинации с константой $\boldsymbol{c}$.

Поэтому в данном случае просто следует соблюдать размерность при подборе скалярной функции к вектору, т.е. скалярная функция должна иметь ту же самую размерность, что и вектор. Например вектору импульса $\boldsymbol{p}$ мы подбираем скаляр mc, волновому вектору $\boldsymbol{k}$ соответствует скаляр ω/c, вектору плотности тока $\boldsymbol{j} = \rho\mathbf{v}$ соответствует скаляр $\rho\ c$, векторному потенциалу $\boldsymbol{A}$ - скалярный потенциал φ/c и так далее.

В этом случае преобразования Лоренца записываются в симметричной форме и имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma\left(x - \beta ct\right), \\
ct' &= \gamma\left(ct - \beta x\right).
\end{aligned}
\tag{16.13}
$$

Несмотря на всю простоту данных преобразований, математики назвали рассматриваемую комбинацию из скалярной функции и вектора четырехвектором и разработали для таких четырехвекторов специальный четырехвекторный анализ. Он внешне напоминает обычный векторный анализ, но со своими специфическими свойствами, которые полностью определяются преобразованиями Лоренца [19].

Все же следует заметить, что скомбинировать две компоненты с помощью преобразований Лоренца, которые очень легко запомнить, может оказаться намного проще, чем путаться в громоздких и абстрактных тензорах и индексах, требующих специального изучения и запоминания, поскольку четырехвекторный анализ существенно отличается от обычного векторного анализа. За этими тензорами уже с трудом можно разглядеть реальные физические поля и уравнения движения материальных объектов.

Тензорный способ описания электромагнитных полей может оказаться удобным в целом ряде инженерных расчетов, например, при расчете ускорителя элементарных частиц или разнообразных реакций с участием этих частиц [19]. Но он не способствует пониманию физики процессов, как, к примеру, не помог в выводе уравнений Максвелла, выражения для силы Лоренца и калибровки Лоренца, не помог понять природу массы и заряда частиц, кулоновского поля и так далее. Об этих физических характеристиках мы продолжим разговор в следующих разделах.

Таким образом, единственной основой для всех преобразований функций и электромагнитных полей при переходе в подвижную систему координат являются обычные преобразования Лоренца. Их физический смысл и был детально рассмотрен нами выше, единственное назначение которых - это приведение сложной кинематической задачи к статике, где можно использовать привычные уравнения, полученные в статических условиях.

Поскольку все идеи, заложенные в преобразованиях Лоренца и четырехвекторах, возникли и развились в рамках обычных классических представлений, а также в классической электродинамике Максвелла - Лоренца, то можно сделать вывод, что они не имеют прямого отношения к специальной теории относительности (СТО).

Эйнштейном была выдвинута гипотеза о том, что все упомянутые выше преобразования могут быть получены только из принципа относительности и постулата об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета.

Исторически же преобразования Лоренца появились задолго до появления СТО и на основе совсем иных соображений. Преобразования Лоренца возникли в рамках общих волновых представлений, которые носят универсальный характер, и поэтому не приходится сомневаться, что они будут справедливы для любых волновых процессов, в частности, в акустике движущейся среды [25]. Если преобразования Лоренца занимают центральное место в СТО, то в акустике эти преобразования используются на основе обычных волновых представлений, минуя принцип относительности.

§ 17. Суперпозиция силовых полей для облака частиц в электростатике

Под электростатикой мы будем понимать процесс рассеяния случайных волн эфира квазинеподвижными частицами, т.е. такими частицами, которые хотя и совершают случайные колебательные движения при рассеянии волн, все же в среднем за интервал наблюдения практически остаются на одном и том же месте или смещаются лишь незначительно.

Для волновых процессов в средах используется принцип суперпозиции волн. Он справедлив в тех случаях, когда возмущения в среде считаются малыми и все волновые явления можно описывать линейными уравнениями. В этом случае результирующее волновое поле для многих частиц получится простым суммированием всех волн от каждой частицы в отдельности.

Поэтому полный силовой потенциал, определенный формулой (14.1), для облака частиц определится как сумма потенциалов отдельных частиц (рис.17.1)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}. \tag{17.1}$$

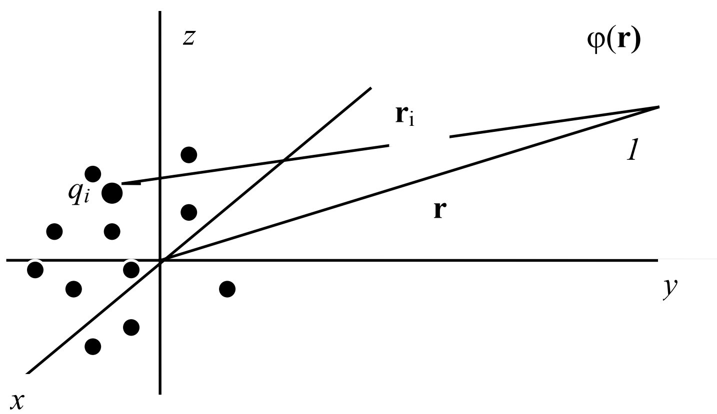

Рис. 17.1. Нахождение силового потенциала в точке 1 как результат суперпозиции полей от облака частиц

В рассматриваемых нами уравнениях σ является аналогом электрического заряда частицы. В соответствии с этим определением и согласно формуле (15.4) $\sigma^*(x,y,z)$ будет являться аналогом объемной плотности заряда $\rho(x,y,z)$. С использованием ρ выражение (17.1) принимает вид

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(x,y,z)}{r}dV\ , \tag{17.2}$$

где интегрирование ведется по всему объему, занимаемому ансамблем частиц.

Для сферически симметричного потенциала (14.1) напряженность силового поля вычисляется очень просто в соответствии с (14.3)

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{17.3}$$

Применим теорему Гаусса - Остроградского для вектора $\mathbf{E}$

$$\int div\mathbf{E}\,dV=\int\mathbf{E}\,d\mathbf{S}\ . \tag{17.4}$$

Распределение зарядов в облаке частиц является дискретным, поэтому имеет смысл перейти к средним значениям функций, как это принято при описании любых сред.

Для малого объема $\triangle V$ выражение (17.4) можно записать через среднее значение $\langle div\mathbf{E}\rangle$ в данном элементе объема

$$\langle div\mathbf{E}\rangle\triangle V=\int\mathbf{E}d\mathbf{S}\,. \tag{17.5}$$

Учитывая, что поток вектора $\mathbf{E}$, имеющего сферическую симметрию и радиальное направление, не зависит от формы поверхности, выбираем поверхность интегрирования в виде сферы с радиусом r, в результате чего получаем

$$\langle div\mathbf{E}\rangle\triangle V=\frac{4\pi r^2 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{\varepsilon_0}\,. \tag{17.6}$$

Выражение (17.6) удобно записать в таком виде:

$$\langle div\mathbf{E}\rangle=\frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}\,. \tag{17.7}$$

Таким образом, мы получили уравнение для средних значений характеристик поля и частиц. Здесь следует отметить, что предельный переход в (17.6) для $\triangle V\to 0$ нужно делать очень осторожно, поскольку в непосредственной близости от рассеивающей частицы вектор $\mathbf{E}$ имеет случайное сильно флуктуирующее направление, а для получения соотношения (17.3) требовалось строго радиальное направление данного вектора. Кроме этого, значение сферически симметричного потенциала силового поля (14.1) получено для расстояния r, значительно большего размеров рассеивающей частицы. Поэтому ΔV в (17.6) не может быть меньше объема случайного движения частицы.

С другой стороны, для того чтобы функции $\langle div\mathbf{E}\rangle$, $\langle\rho\rangle$ и $\langle\sigma^*\rangle$ были сравнительно гладкими и непрерывными функциями координат, необходимо, чтобы в элементе объема ΔV содержалось очень большое число частиц. При этом условии данные величины приобретут смысл обыкновенных функций координат и знак усреднения в (17.7) можно будет убрать, что дает

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{17.8}$$

С использованием выражения (14.3) уравнение (17.8) для больших ансамблей частиц принимает вид

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17.9}$$

и называется уравнением Пуассона.

Уравнения (17.8) и (17.9) являются макроскопическими уравнениями, поскольку они описывают характеристики полей, усредненные по большим ансамблям частиц.

§ 18. Уравнение непрерывности для облака движущихся частиц

Рассмотрим облако частиц, медленно перемещающихся произвольным образом в пределах некоторого объема ΔV (рис.18.1).

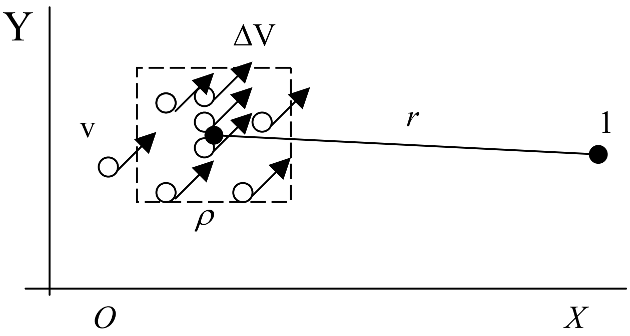

Рис.18.1. Перемещение электронов через неподвижный объем ΔV.

Если допустить, что полное (суммарное) эффективное сечение рассеяния случайных эфирных волн всеми частицами не зависит от взаимного расположения частиц в данном объеме, т.е. частицы всегда удалены на достаточно большое расстояние одна от другой по сравнению с их размерами, то при этом выдерживается принцип суперпозиции для волновых процессов, и справедливо соотношение:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\int \sigma^*(x,y,z)\,dV = 0. \qquad (18.1)$$

Согласно формуле дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему [26], соотношение (18.1) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial t} + div\left(\sigma^* \mathbf{v}\right) = 0, \qquad (18.2)$$

или в терминах объемной плотности зарядов и тока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \mathbf{v}\right) = 0. \qquad (18.3)$$

Уравнения (18.2) и (18.3) называются уравнениями непрерывности и выражают закон сохранения некоторой физической величины в пределах заданного объема. Эти уравнения могут быть записаны в иной форме с использованием потенциалов φ и $\mathbf{A}$. Осуществим этот переход.

В § 14 силовой потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ были получены посредством усреднения по облаку движущихся частиц. Для облака частиц средняя плотность заряда в объеме $\vartriangle V$ равняется

$$\langle \rho \rangle = \frac{\sum q_i}{\vartriangle V}. \qquad (18.4)$$

При этом элемент объема $\vartriangle V$ мы считаем неподвижным и постоянным, а число частиц в нем может изменяться, вызывая тем самым изменение ρ со временем.

Потенциалы φ и $\mathbf{A}$ будем определять в точке (1) на большом расстоянии r от неподвижного объема $\vartriangle V$, следовательно, r в данном случае можно считать постоянной величиной, и поэтому операция div в наших уравнениях будет относиться только к усредненному по облаку частиц переменному вектору $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. С учетом этого заменим в уравнении (18.3) величину ρ на ее среднее значение из (18.4) и поделим оба слагаемых на $4\pi\varepsilon_0 c^2 r$, внеся это под знак производных, в результате чего получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r \vartriangle V} + div \sum \frac{q_i \mathbf{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r \vartriangle V} = 0. \qquad (18.5)$$

Сократив данное уравнение на величину ΔV и подставив в него значения потенциалов из (18.1) и (15.21) , приходим к уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\mathbf{A} = 0 \,. \tag{18.6}$$

Данное уравнение называется калибровочным условием Лоренца, хотя мы видим, что оно возникло как результат выполнения уравнения непрерывности, т.е. закона сохранения числа частиц или заряда.

Все изменения в уравнении (18.6) происходят за счет перемещения частиц в одном из выбранных элементов объема ΔV. Это уравнение выполняется для любого элемента объема из рассматриваемого облака частиц и для любых расстояний *r,* значительно превышающих размеры выбранного элемента объема.

§ 19. Напряженность электрического поля для движущихся частиц

Ранее мы убедились, что при движении частицы в эфире со скоростью $\mathbf{v}$ за счет запаздывания рассеянных частицей случайных волн эфира возникает эффект деформации силового поля, в результате чего оно утрачивает сферическую симметрию (рис.15.1). Очевидно, что это отразится и на векторе напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

В случае электростатики выражение для вектора $\mathbf{E}$ через потенциал φ имело очень простой вид (14.1). Теперь нам следует определить, как повлияет на форму этого поля скорость частиц в эфире $\mathbf{v}$ с учетом волновых процессов.

Нами было показано, что силовой потенциал φ удовлетворяет волновому уравнению (15.3). При наличии распределенных зарядов функция φ удовлетворяет и уравнению Пуассона (17.9). Используя принцип суперпозиции силовых полей, обоснованный в § 17, из суммы уравнений (15.3) и (17.9) получаем макроскопическое волновое уравнение для потенциала φ при наличии распределенных в пространстве зарядов

$$c^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}c^2 \,. \tag{19.1}$$

С учетом соотношения (17.8) уравнение (19.1) приводим к виду

$$c^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + c^2 div\mathbf{E} = 0 \,. \tag{19.2}$$

Затем, продифференцировав уравнение (18.6) по времени, получаем

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+div\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=0\,, \qquad (19.3)$$

где во втором слагаемом мы поменяли местами производную по времени с оператором div. Из уравнений (19.2) и (19.3) имеем

$$\Delta\varphi+div\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+div\mathbf{E}=0\,. \qquad (19.4)$$

Заменив в последнем уравнении $\Delta\varphi$ на $div\nabla\varphi$, приходим к уравнению

$$div\left(\nabla\varphi+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{E}\right)=0\,, \qquad (19.5)$$

откуда окончательно получается

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,. \qquad (19.6)$$

Следует заметить, что выражение в скобках уравнения (19.5) не может равняться ротору от любого вектора, поскольку это полностью противоречит природе заключенных в скобки векторов $\nabla\varphi$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$.

Таким образом, в выражение (19.6) для вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ вошла частная производная по времени от вектора $\mathbf{A}$, которая и учитывает факт движения частиц в эфире.

В § 15 было отмечено (формула (15.21)), что запаздывающий векторный потенциал $\mathbf{A}$ отличается от силового запаздывающего скалярного потенциала φ на множитель $\frac{\mathbf{v}}{c^2}$, т.е.

$$\mathbf{A}=\frac{\varphi\,\mathbf{v}}{c^2}\,. \qquad (19.7)$$

Далее учтем тот факт, что в уравнениях с частными производными в динамике Лагранжа операторы ∇ и Δ не действуют на компоненты скорости, т.е. координаты и скорости выступают в роли независимых динамических переменных.

Умножив уравнение (17.9) на величину $\frac{\mathbf{v}}{c^2}$ и введя скорость $\mathbf{v}$ под знак Δ, получаем с учетом соотношения (19.7)

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}\,. \qquad (19.8)$$

Используя принцип суперпозиции силовых волновых полей по аналогии с выводом уравнения (19.1), из волнового уравнения для вектора **A** (15.35) и уравнения (19.8) получаем результирующее уравнение

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}\,. \tag{19.9}$$

Данное уравнение потребуется нам для вывода одного из уравнений Максвелла и дальнейшего анализа в теории электромагнетизма, в частности, для выяснения природы так называемого тока смещения.

§ 20. Взаимодействие между движущимися частицами. Сила Лоренца

В настоящее время считается, что аналитическое выражение для силы Лоренца не выведено из уравнений Максвелла или специальной теории относительности. Обычно выражение для этой силы получают из уравнения Лагранжа для динамики частицы, в котором функция Лагранжа подбирается в таком виде, чтобы это соответствовало эксперименту [36]. Поэтому можно полагать, что нахождение этой силы в общем случае не является очень простым.

Имея предварительный набор уравнений, которые были рассмотрены нами, можно попытаться оценить характер взаимодействия между частицами, движущимися с произвольными скоростями. При этом можно поступить двумя способами: вначале найти вид поля рассеянных волн от первой частицы с учетом ее движения и затем найти силу воздействия этих волн на вторую частицу, либо наоборот.

Вопрос о том, как воздействует движущаяся частица на неподвижную, был решен при нахождении запаздывающего потенциала (15.33). На движущуюся частицу этот запаздывающий потенциал, очевидно, будет воздействовать несколько иначе, что и требуется определить.

Таким образом, картина рассеянных эфирных волн, которая была сферически симметричной в статике, деформируется дважды: вначале за счет движения в эфире первой частицы, и затем – за счет движения второй частицы.

В общем случае электромагнитное взаимодействие между движущимися частицами является очень сложным. Для оценки характера этой силы рассмотрим простейший случай, а именно, пример из магнитостатики, т.е. взаимодействие одного движущегося произвольным образом электрона с электрическим током или облаком медленно движущихся электронов (рис.20.1). Для упрощения расчетов скорости частиц будем считать малыми и поэтому некоторыми эффектами запаздывания полей можно пренебречь.

Сила, действующая на отдельный неподвижный электрон со стороны движущихся частиц, определяется напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ согласно полученному нами соотношению (19.6)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{20.1}$$

где скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ создаются электронами, движущимися в проводнике.

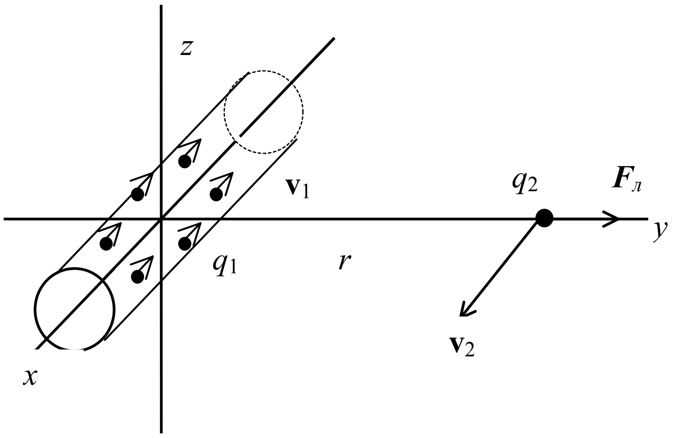

Рис. 20.1. Взаимодействие движущейся частицы q с электрическим током в проводнике

Теперь необходимо установить, как изменится напряженность $\mathbf{E}$ в том случае, если отдельный электрон будет двигаться с произвольной скоростью $\mathbf{v}_2$. Начнем со второго слагаемого, а именно, напишем полную производную по времени от вектора $\mathbf{A}$ с учетом движения электрона

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \nabla \mathbf{A}\ . \tag{20.2}$$

Если в той области, где движется электрон, отсутствуют посторонние заряды и токи, т.е. $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$, тогда из соотношения (18.6), которое было выведено нами из уравнения непрерывности (18.3), получаем

$$\nabla \mathbf{A} = div\mathbf{A} = 0\ . \tag{20.3}$$

В результате для движущегося электрона из (20.2) имеем

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\ . \tag{20.4}$$

Таким образом, движение электрона со скоростью $\mathbf{v}_2$ не приведет к изменению второго слагаемого в формуле (20.1). Несколько сложнее получается с первым слагаемым. Движущийся электрон будет воспринимать потенциальное поле φ не так, как это было в статике. Чтобы это определить, нужно перейти в подвижную систему координат, связанную с электроном.

Мы уже знаем, что скалярный потенциал φ входит как компонента четырехвектора, имеющего вид $\left(\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A}\right)$, и при переходе в подвижную систему координат преобразуется как временная компонента ct в преобразованиях Лоренца

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v_x x}{c}\right). \qquad (20.5)$$

Для скалярного потенциала это будет выглядеть так:

$$\frac{\varphi'}{c} = \gamma\left(\frac{\varphi}{c} - \frac{\mathbf{v}_2\mathbf{A}}{c}\right), \qquad (20.6)$$

где использовано скалярное произведение $\mathbf{v}_2\mathbf{A}$ с учетом того, что остальные компоненты скорости $\mathbf{v}_2$ не дадут вклада в последнее слагаемое. Учитывая, что для малых скоростей $\gamma = 1$, из (20.6) получаем для движущегося электрона

$$\varphi' = \varphi - \mathbf{v}_2\mathbf{A}. \qquad (20.7)$$

Согласно формуле (20.1) с учетом движения электрона и с использованием (20.7) имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{v}_2\mathbf{A}\right). \qquad (20.8)$$

Последнее слагаемое в (20.8) преобразуем по известной формуле векторного анализа

$$grad\,\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{b}, rot\,\mathbf{a}] + [\mathbf{a}, rot\,\mathbf{b}], \qquad (20.9)$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - любые два вектора. Применяя эту формулу к скалярному произведению $\mathbf{v}_2\mathbf{A}$, мы учитываем, что производные по координатам не действуют на компоненты скорости $\mathbf{v}_2$, и в итоге получается

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{v}_2, rot\,\mathbf{A}]. \qquad (20.10)$$

Уравнение движения частицы в электромагнитном поле, на которую действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, запишется в виде:

$$\frac{d\left(m\mathbf{v}_2\right)}{dt} = \mathbf{F} = q\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + q\left[\mathbf{v}_2, rot\,\mathbf{A}\right]. \qquad (20.11)$$

Мы видим, что сила $\mathbf{F}$ состоит из двух существенно различных частей. Первая часть (первый и второй члены в правой части) не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости: сила пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

По характеру действия электромагнитной силы на движущуюся частицу ее <u>условно разделили</u> на *электрическую часть* (сила, которая может сообщать частице энергию) и *магнитную часть* (сила, которая не производит работы над отдельной движущейся частицей, поскольку она всегда перпендикулярна скорости частицы). Такое разделение сил и полей возникло исторически еще до создания электромагнитной теории, то есть по внешним признакам проявления сил.

Для описания магнитного поля используется вектор

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}\,, \qquad (20.12)$$

а электрическое поле определяется по формуле (20.1).

Уравнение движения частицы в электромагнитном поле (20.11) можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\left[\mathbf{v}\mathbf{B}\right]. \qquad (20.13)$$

Стоящее справа выражение носит название силы Лоренца. Первая ее часть – сила, с которой действует электрическое поле на электрон, – не зависит от скорости частицы и ориентирована по направлению поля $\mathbf{E}$. Вторая часть – сила, обусловленная действием магнитного поля на электрон, – пропорциональна скорости частицы и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля $\mathbf{B}$. Отметим, что по своей природе $\mathbf{E}$ представляет собой полярный, а $\mathbf{B}$ – аксиальный векторы. Это сказывается на их поведении при различных преобразованиях координат. Например, при зеркальном отражении системы координат, когда вектор $\mathbf{E}$ направлен нормально к плоскости зеркала, он меняет свой знак на обратный. Вектор $\mathbf{B}$ при подобном преобразовании своего знака не меняет, т.е. он ведет себя как вектор угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$.

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{B} = 0$, то говорят об электрическом поле; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{B} \neq 0$, то поле называется магнитным. Из уравнения (20.11) мы видим, что это разделение полей является чисто условным, поскольку векторный потенциал $\mathbf{A}$ входит в обе части полей, и электрическая часть поля может в любой момент перейти в магнитную часть и наоборот. Поэтому иногда говорят, что переменное во времени магнитное поле порождает электрическое поле, а переменное во времени электрическое поле порождает магнитное поле, хотя это не совсем соответствует механизму формирования полей. На самом деле поля всегда возникают одновременно и распространяются со скоростью c в виде сферических волн от движущихся частиц.

В общем случае электромагнитное поле является наложением обоих полей, а иногда представляет собой довольно сложную комбинацию из электрической и магнитной частей единого поля.

Теперь мы также знаем и то, что **в основе всех электромагнитных полей любого происхождения лежат рассеянные частицами случайные волны эфира,** промодулированные по частоте, величине и поляризации. Характер этой модуляции целиком обусловлен формой движения частиц.